АСТРОНОМИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
НАУЧНЫЙ СОВЕТ ПО АСТРОНОМИИ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ПУЩИНСКАЯ РАДИОАСТРОНОМИЧЕСКАЯ ОБСЕРВАТОРИЯ
физико-математическая олимпиада

Заочная олимпиада ННЦ по астрономии и физике космоса

(XXV Открытая олимпиада Центральной России – LIX Олимпиада ННЦ)

Центральный оргкомитет:
URL: http://www.astroturnir.ru/2024/
e-mail: astroturnir@mail.ru

1-8 апреля 2024 г.

Решение задач для 10-11 класса

1. **Спонтанное рождение материи.** 1 кубический километр расширяется как:

$$L_1 = L_0 + \Delta L = 1 + \Delta L/L_0,$$

$$V_1 = L_1^3 = (L_0 + \Delta L)^3 = L_0^3\,(1 + \Delta L/L_0)^3 \approx V_0 + V_0 \cdot 3\Delta L/L_0,$$

По формуле Хаббла

$$\Delta L = u \cdot t = H_0 \cdot L_0 \cdot t = 68 \text{ км/с/МПк} \times L_0 \times 1 \text{ год} \times 365{,}25 \text{ сут/год} \times 86400 \text{ с/сут} = 6{,}9 \cdot 10^{-11}\, L_0$$

за год, относительное увеличение объёма

$$\Delta V/V_0 = 3\Delta L/L_0 \approx 2{,}08 \cdot 10^{-10}.$$

На такую же малую долю должна увеличиться суммарная масса частиц в рассматриваемой области Вселенной, чтобы плотность осталась такой же, то есть, чтобы Вселенная оставалась стационарной.
Средняя плотность вещества во Вселенной в массах нейтрона составит

$$n_0 = 10^{-29} \text{ г/см}^3 / 1{,}67 \cdot 10^{-24} \text{ г/нейтрон} \approx 6 \cdot 10^9 \text{ нейтронов/км}^3.$$

Для сохранения плотности в год требуется спонтанное рождение

$$\Delta n = n_0 \times \Delta V/V_0 = 1{,}25 \approx 1{,}3 \text{ нейтрона/км}^3.$$

Примечание: *Ответ «1,25 нейтрона» неправильный. У нас параметр Хаббла дан только с двумя значащими цифрами, а средняя плотность вещества – так вообще без значащих цифр, только порядок. Поэтому и ответ нужно давать лишь с точностью до порядка: «порядка 1 нейтрона на км^3», в крайнем случае: «около 1,3 нейтрона на км^3».*

2. **Наиболее яркий Сатурн.** Наиболее яркой на земном небе внешняя планета бывает в противостояние. Противостояние бывает за половину синодического периода до или через половину синодического периода после соединения.
Синодический период Сатурна:

$$T_{син} = (T_C T_З)/(T_C - T_З) = 10759{,}2 \times 365{,}26 \,/\, (10759{,}2 - 365{,}26) \approx 378{,}1 \text{ сут},$$

или 1 календарный год плюс 13,1 дней (для обычных годов) или 12,1 дней (для високосных годов).
Далее, для текущего и прошедших годов можно повторить рассуждения из решения для 8-9 классов и получить наиболее оптимальный 2008 год. Проведя симметричные вычисления можно получить наиболее оптимальный 2040 год для следующих 20 лет. А дальше?
Можно точно также сравнивать полуцелое число синодических периодов планеты (k+0,5), прошедших с 29 февраля 2024 года, с целым числом лет, кратным четырём. Но поступим проще.

Данные из сопроводительных таблиц могут быть использованы в любой задаче.

Известно (и интуитивно ясно), что повторение противостояний в примерно одни и те же даты происходит через 1 сидерический период обращения Сатурна, то есть, через 29,46 лет. Соответственно, противостояние примерно в ту же дату, что и нынешнее соединение, происходило или будет происходить через примерно (N+½) этих периодов. Таким образом, нам нужно найти число, кратное 4 (в диапазоне от -20 до 72), наиболее близкое к (N+½)×29,46. Наиболее близкое к ±14,73 – это 16, разница 1,27. Наиболее близкое к 3/2×29,46 = 44,19 – это 44, разница 0,19. Наиболее близкое к 5/2×29,46 = 73,65 – это 72, разница 1,65. 7/2×29,46 уже выходит в XXII век.

Таким образом, наиболее близкое к (N+½)×14,73 в XXI веке – это 44, что соответствует 2068 году.

3. **Комета.** Диаметр облака Оорта, откуда приходят кометы, – примерно 100 тыс. а.е., радиус – 50 тыс а.е. При падении кометы на Солнце с такого расстояния большая полуось её орбиты составляет примерно 25 тыс. а.е. По третьему закону Кеплера период обращения такой кометы равен $25000^{3/2}$ ≈ 3 950 000 или примерно 4 миллиона лет.

   Оказывается, поэтесса не преувеличила! (И, кстати, наиболее яркими бывают именно такие, долгопериодические кометы).

4. **Найдите ошибки.** Сначала отметим ошибки в тексте приведённого решения:

   1. «Эпилепсоид вращения» (упомянут два раза) – правильно «эллипсоид вращения».
   2. «По закону сохранения импульса» – ошибка, т.к. это другой закон. Использованный здесь закон называется законом сохранения момента импульса.
   3. При вычислениях ошибка в количестве секунд в сутках, написано 84600 с/сут, а должно быть 86400 с/сут.
   4. В формуле $\Delta R = 6378000$ м × $(-25{,}9\cdot10^{-9})$ = -0,1652 м = -16,52 см упущен знак минус, должно было быть $\Delta R = -6378000$ м × $(-25{,}9\cdot10^{-9})$ = 0,1652 м = 16,52 см.
   5. В этой же формуле упущен коэффициент ½, должно быть $\Delta R = -6378000$ м × × $(-25{,}9\cdot10^{-9})$ / 2 = 0,0826 м = 8,26 см.
   6. Соответственно, ошибка в ответе «экваториальный радиус Земли уменьшился…» – при таком решении правильно было бы «экваториальный радиус Земли увеличился…».
   7. Излишняя точность в ответе. Точность с более чем двумя значащими цифрами здесь неуместна.

   Но самое главное, что данное решение в принципе неверно. А правильно так:

К 1970 году за счёт сил приливного трения и геологических процессов (в среднем) продолжительность суток увеличилась на

0,0017 с/сутки/век × 0,7 века = 0,00119 с/сутки,

что требует вводить дополнительную секунду 1 раз в 1 / 0,00119 /сутки = 840 суток ≈ ≈ 2,3 года.

Если бы далее в 1970х годах продолжительность суток увеличивалась бы только за счёт приливного трения (без геологических процессов), то в течение 10 лет она увеличилась бы на ещё

0,0023 с/сутки/век × 0,1 века = 0,00023 с/сутки,

таким образом, общее увеличение составило бы

0,00119 с/сутки + 0,00023 с/сутки = 0,00142 с/сутки.

Среднее значение за 1970е составило бы 0,0013 с/сутки и за 3652 суток добавило бы

$$0{,}0013 \text{ с/сутки} \times 3652 \text{ суток} \approx 4{,}7 \text{ секунды}.$$

Однако были введены 9 дополнительных секунд. Таким образом, ещё около 4,3 секунд появились за счёт геологических процессов – изменения параметров эллипсоида Земли.

Момент инерции эллипсоида вращения равен $I = {}^2/_5\, MR^2$, где M – масса эллипсоида, R – величина полуоси, перпендикулярной оси вращения, то есть экваториальный радиус в нашем случае. По закону сохранения момента импульса

$$I\omega = \text{const}$$

$$\Delta I\omega = -I\Delta\omega,$$

$$\Delta({}^2/_5\, MR^2)\omega = -{}^2/_5\, MR^2\cdot\Delta\omega$$

$$\Delta(R^2)\cdot\omega = -R^2\cdot\Delta\omega$$

$$2R\cdot\Delta R\cdot\omega = -R^2\cdot\Delta\omega$$

$$\Delta R = -R\cdot\Delta\omega/\omega\ /\ 2$$

$$\Delta\omega/\omega = -\Delta T/T = -4{,}3 \text{ с} / (3652 \text{ сут} \times 86400 \text{ с/сут}) = -13{,}6\cdot 10^{-9}.$$

$$\Delta R = -6378000 \text{ м} \times (-13{,}6\cdot 10^{-9})\ /\ 2 = 0{,}043 \text{ м} = 4{,}3 \text{ см} \approx 4 \text{ см}.$$

Точность с более чем одной значащей цифрой в такой оценочной задаче неуместна.
Ответ: экваториальный радиус Земли за 1970е годы увеличился примерно на 4 см.

5. **Меркурий и Сатурн.** Перейдём в синодическую систему отсчёта, в которой Солнце и Земля неподвижны, а другие планеты движутся вокруг Солнца со своими синодическими периодами. [Здесь нужно нарисовать соответствующий чертёж]. При этом, если смотреть со стороны северного полюса эклиптики, внешние планеты движутся по часовой стрелке, а внутренние – против. Значит, Меркурий в период около верхнего соединения с Солнцем и Сатурн в период около своего соединения движется навстречу друг другу. Соответственно, их взаимное соединение произойдёт в промежуток времени между $11^{ч}52^{м}$ 28 февраля и $0^{ч}15^{м}$ 29 февраля (по московскому времени), обозначим эти моменты через время, прошедшее с $00^{ч}00^{м}$ 28 февраля: $T_M = 11{,}87^{ч}$, $T_S = 24{,}25^{ч}$.

Последовательность событий: сначала Меркурий в своём движении против часовой стрелки проходит соединение с Солнцем в $T_M = 11{,}87^{ч}$, затем встречается с Сатурном в момент T_1, затем Сатурн в своём движении по часовой стрелке проходит соединение с Солнцем в $T_S = 24{,}25^{ч}$. Причём, поскольку планеты проходят одинаковое угловое расстояние между точкой взаимного соединения и точкой соединения с Солнцем, то

$$(T_1 – T_M)\omega_M = (T_S – T_1)\omega_S,$$

где ω_M и ω_S – угловые скорости Меркурия и Сатурна по нашему небу относительно Солнца. Откуда

$$T_1 = (T_M\omega_M + T_S\omega_S)\ /\ (\omega_M + \omega_S).$$

Как видим, для нахождения нам осталось найти только соотношение где ω_M и ω_S.

По классическим формулам синодического движения и данным о сидерических периодах Меркурия, Земли и Сатурна, взятым из прилагаемой таблицы Солнечной системы, вычисляем периоды синодического движения. Для Меркурия получаем T_{SM} = 115,9 дня, для Сатурна – T_{SS} = 378,1 дня.

Соответственно, угловые скорости синодического движения Меркурия и Сатурна вокруг Солнца равны: $\omega_{SM} = 2\pi/T_{SM}$, для Сатурна – $\omega_{SS} = 2\pi/T_{SS}$.

Данные из сопроводительных таблиц могут быть использованы в любой задаче.

Для вычисления где ω_M и ω_S полученные выше ω_{SM} и ω_{SS} нужно умножить на соотношение расстояний от этих планет до Солнца и Земли:

$$\omega_M = \omega_{SM} \times R_M/(R_E+R_M) = (2\pi/T_{SM}) \times R_M/(R_E+R_M),$$

$$\omega_S = \omega_{SS} \times R_S/(R_E+R_S) = (2\pi/T_{SS}) \times R_S/(R_E+R_S),$$

где R_i – радиусы орбит соответствующих планет. Поскольку для решения задачи нам нужно найти лишь соотношение ω_M и ω_S, достаточно вычислить их в произвольных (но одних и тех же) единицах.

$$\omega_M = \omega_{SM} \times R_M/(R_E+R_M) = (2\pi/115{,}9) \times 0{,}387/(1+0{,}387) = 0{,}01513 \text{ сут}^{-1},$$

$$\omega_S = \omega_{SS} \times R_S/(R_E+R_S) = (2\pi/378{,}1) \times 9{,}539/(1+9{,}539) = 0{,}01504 \text{ сут}^{-1}.$$

Подставляя эти значения в формулу $T_1 = (T_M\omega_M + T_S\omega_S) / (\omega_M + \omega_S)$, получаем $T_1 = 18{,}04^{ч} = 18^{ч}02^{м}$ (28 февраля).

Ответ: 28 февраля в $18^{ч}04^{м}$.

Оба соединения происходят тогда, когда Меркурий и Сатурн на земном небе находятся около Солнца, поэтому, очевидно, что планеты видны не будут.

6. Киса из Кусы.

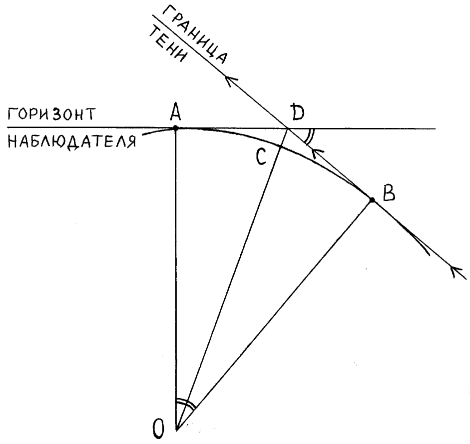
6.1. На снимке стареющая Луна в фазе 0,5 или чуть-чуть больше. Это означает, что до новолуния осталось ¼ лунного месяца (т.е. синодического периода Луны, равного 29,53 сут) или чуть больше. Новолуние в предшествующий Олимпиаде месяц было в ночь 9/10 февраля, четверть лунного месяца до этого – вечер 2 февраля. Однако стареющая Луна бывает видна утром, а не вечером. Значит, действительно, фаза Луны чуть больше 0,5, до новолуния осталось чуть больше ¼ лунного месяца, съёмка производилась утром 2 февраля. Найдём более точно время съёмки. На снимке терминатор Луны вертикален. Это значит, что Солнце находится на горизонте.
(Заметим, что вертикальный терминатор Луны не означает, что Луна кульминирует, как можно было бы предположить. Здесь более хитрая сферическая геометрия).
Восход Солнца 2 февраля на широте 55° происходит примерно в 7 часов 50 минут среднесолнечного времени (это нужно вспомнить или рассчитать). 7:50 утра солнечного времени для данной местности соответствует 8:50 утра местного (челябинского) времени, поскольку восточная долгота 60° соответствует часовой зоне UT+04, а используется местное время UT+05. Итак, ответ: 2 февраля в 8:50 утра.

Примечание: На удивление точно получилось. В exif-данных снимка стоит дата 2 февраля и время 08:53.

Примечание: Заочная Олимпиада планировалась к проведению, начиная с марта, предполагалось, что «месяц, предшествующий Олимпиаде» – это февраль. Однако, поскольку Олимпиада продолжилась в апреле, решения, в которых участники посчитали предшествующим месяцем март, также считаются полностью правильными. Решение в этом случае аналогичное, новолуние в марте было 10 числа (или можно отталкиваться от новолуния 8 апреля, во время которого произошло солнечное затмение). Правильный ответ: 3 марта в 7:50 утра.

6.2. Угловой размер Луны – $9{,}3\cdot10^{-3}$ рад или 32′. Размер морды кисы на снимке – около 25 мм, Луны на увеличенном в 2,5 раза фрагменте – 11 мм. Таким образом, угловой размер морды равен $\beta = 9{,}3\cdot10^{-3}$ рад $\times 2{,}5 \times 25 / 11 = 5{,}3\cdot10^{-2}$ рад = 1/19 рад. Размер морды можно оценить в B = 12 см. Расстояние от фотоаппарата до кисы равно $L = B / \beta = 12$ см $\times 19 = 2{,}3$ м.

Данные из сопроводительных таблиц могут быть использованы в любой задаче.



7. Самолёт. Описан весенний вечер, причём «уже заметно вызвездило даль». Важный момент в задаче, ключ к её решению – осознать, что же это значит. Можно предположить, что уже закончились гражданские сумерки, то есть центр Солнца опустился под горизонт более, чем на 6 градусов. Предположим, что это – около 7 градусов.

Высота полета самолёта будет наименьшей из возможных, если азимут самолёта равен текущему азимуту зашедшего Солнца (т.е. самолёт летит перпендикулярно терминатору). Для оценки наименьшей высоты полета сделаем чертеж в плоскости «наблюдатель–Солнце–центр Земли». Точка A – наблюдатель, через точку B проходит терминатор, O – центр Земли, угол AOB равен 7°.

Точка D – точка с наименьшей высотой, при которой самолёт освещён Солнцем и в то же время виден из точки A. В треугольнике DOB угол DOB равен 3,5°, высота самолёта CD = OD – OC = R/cos3,5° – R ≈ 12 км.

Итак, чтобы сразу после гражданских сумерек самолёт, освещенный Солнцем, был виден на горизонте по азимуту, равному азимуту Солнца, он должен лететь на высоте около 12 километров. Такая высота доступна современным лайнерам.

Данные из сопроводительных таблиц могут быть использованы в любой задаче.